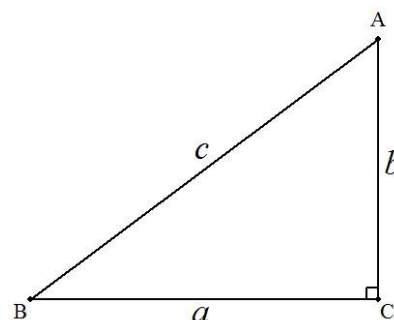


三平方の定理の証明

定理

直角三角形の直角をはさむ2辺の長さを、 a, b 、斜辺の長さを c とすると、次の関係が成り立つ。

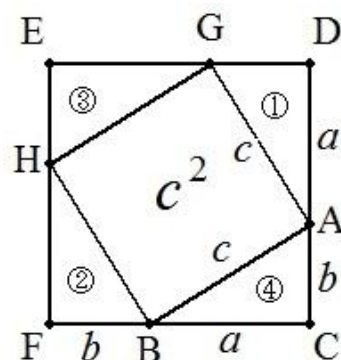
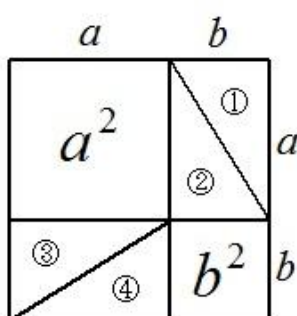
$$a^2 + b^2 = c^2$$



1. 正方形の面積を利用(1)

1 辺が $a+b$ の正方形の中に直角三角形 ABC (④) と合同な 3 つの直角三角形①②③を右の図のように 2 通の方法で配置する。

正方形から 4 つの直角三角形①②③④を取り除くと、明らかに、 $a^2 + b^2 = c^2$ が成り立つことがわかる。



2. 正方形の面積を利用(2)

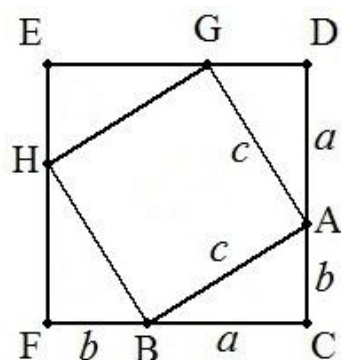
直角三角形 ABC と合同な直角三角形を、AB を 1 辺とする正方形 AGHB の周りに書き加える。

(□CDEF の面積) = (□AGHB の面積) + (4 つの直角三角形の面積)

$$(a+b)^2 = c^2 + 4 \times \frac{1}{2} ab$$

展開して整理すると

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2 \blacksquare$$



3. 正方形の面積を利用(3)

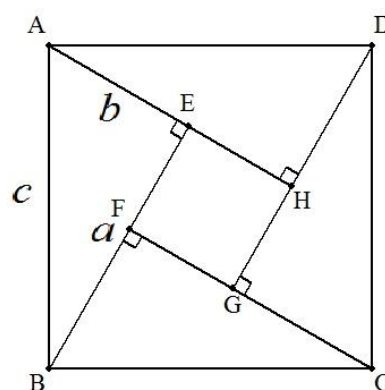
四角形 ABCD は 1 辺の長さが c の正方形、また、 $BE=a$ 、 $AE=b$ である。また、正方形 EFGH の 1 辺の長さは $a-b$ である。

(4 つの直角三角形の面積) + (□EFGH の面積) = (□ABCD の面積) であるから

$$4 \times \frac{1}{2} ab + (a-b)^2 = c^2$$

$$2ab + a^2 - 2ab + b^2 = c^2$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2 \blacksquare$$



4. 直角三角形の相似を利用

$\angle C=90^\circ$ の三角形 ABC の頂点 C から AB に下ろした垂線の足を H とする。

$\triangle ACH \sim \triangle ABC$ より, $AH : AC = AC : AB$,

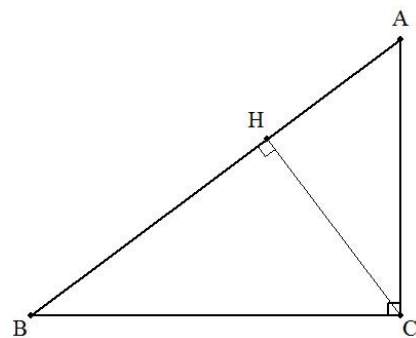
$$AH : b = b : c \quad \therefore AH = \frac{b^2}{c}$$

同様に, $\triangle CBH \sim \triangle ABC$ より $BH : BC = BC : BA$

$$BH : a = a : c \quad \therefore BH = \frac{a^2}{c}$$

$$AH + BH = AB \text{ であるから } \frac{b^2}{c} + \frac{a^2}{c} = c$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2 \blacksquare$$



5. 等積変形

各辺を一辺とする正方形を $\triangle ABC$ の外側にかき, それぞれ ADEB, BFGC, CHIA とおき, C から AB, DE へ下ろした垂線の足をそれぞれ J, K とする。また, 長方形 ABCD の面積を単に ABCD で表すものとする。

$$\frac{1}{2} BFGC = \triangle BFC = \triangle BFA \equiv \triangle BCE = \triangle BJE = \frac{1}{2} JKEB \text{ より}$$

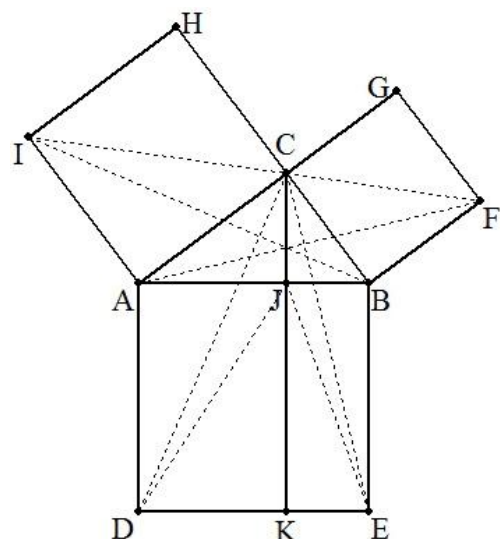
$$BFGC = JKEB$$

$$\text{同様に, } \frac{1}{2} CHIA = \triangle ACI = \triangle ABI \equiv \triangle ADC = \triangle ADJ = \frac{1}{2} ADKJ \text{ より}$$

$$CHIA = ADKJ$$

$$\text{よって, } BFGC + CHIA = JKEB + ADKJ = ADEB$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2 \blacksquare$$



6. 内接円と面積

直角三角形 ABC の内接円 I の半径を r とおく。

$$c = (a-r) + (b-r) \text{ より } r = \frac{a+b-c}{2} \dots \textcircled{1}$$

$\angle IBC + \angle ICA + \angle IAB = \angle ABC$ であるから

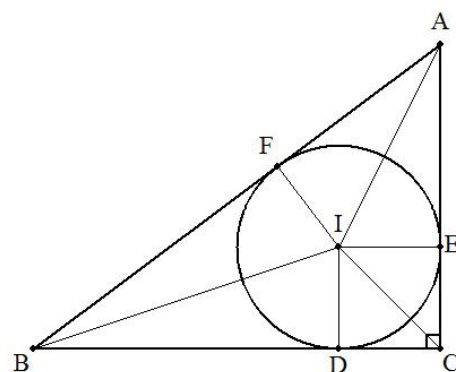
$$\frac{1}{2} ar + \frac{1}{2} br + \frac{1}{2} cr = \frac{1}{2} ab$$

$$\frac{a+b+c}{2} r = \frac{1}{2} ab$$

$$\text{これに}\textcircled{1}\text{を代入すると } \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} = \frac{1}{2} ab$$

$$\text{両辺に 4 をかけると } (a+b)^2 - c^2 = 2ab$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2 \blacksquare$$



$$BD = a - r \text{ より, } BF = a - r$$

$$AE = b - r \text{ より, } AF = b - r$$

7. 方べきの定理利用(1)

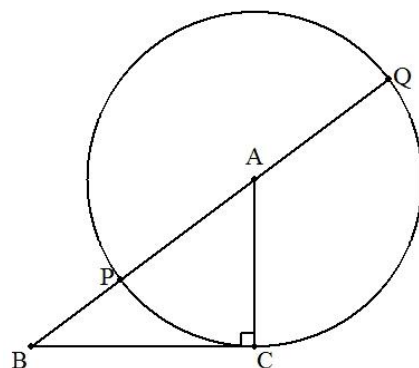
A を中心とする半径 $AC=b$ の円と AB の交点を P , BA の延長と円の交点を Q とする。

方べきの定理より $BC^2=BP \cdot BQ$

$$a^2=(c-b)(c+b)$$

展開して移項すると

$$\therefore a^2+b^2=c^2 \blacksquare$$



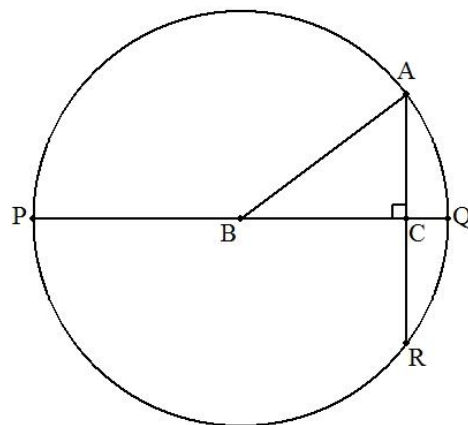
8. 方べきの定理利用(2)

B を中心とする半径 BA の円と BC の延長との交点をそれぞれ P , Q , また, AC の延長と円との交点を R とする。

方べきの定理より $AC \cdot RC=PC \cdot QC$

$$b^2=(c+a)(c-a)$$

$$\therefore a^2+b^2=c^2 \blacksquare$$



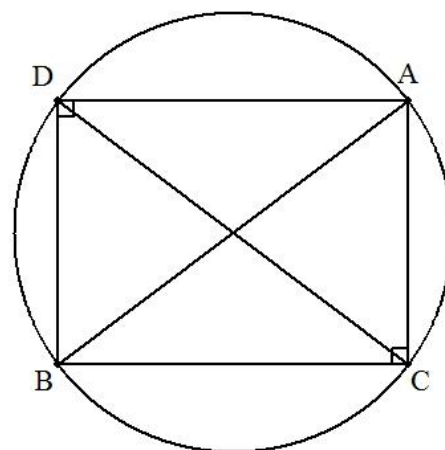
9. トレミーの定理利用

斜辺 AB の中点に関して点 C と対称な点を D とすると, 四角形 $DBCA$ は長方形となるので円に内接する。

トレミーの定理より

$$DA \cdot BC+DB \cdot AC=AB \cdot DC$$

$$a^2+b^2=c^2 \blacksquare$$



(トレミーの定理)

円に内接する四角形の 2 組の対辺の積の和は対角線の積に等しい。

(2012/1/18 時岡)